

SECOND SEMESTER EXAMINATION 2021-22**Class - B.Sc.****Subject - Mathematics
(Calculus & Algebra-II)**

Time : 2.30 Hrs.

Max. Marks : 80

Total No. of Printed Page : 08

Mini. Marks : 28

नोट – प्रश्न पत्र तीन खण्डों में विभक्त है । सभी तीन खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार हल कीजिये । अंकों का विभाजन प्रत्येक खण्ड में दिया गया है ।

Note: Question paper is divided into three sections. Attempt question of all three section as per direction. Distribution of Marks is given in each section.

खण्ड – 'अ' Section - 'A'

प्रत्येक इकाई से दो प्रश्न हल कीजिये ।

Attempt two questions from each unit.

अतिलघुउत्तरीय प्रश्न, शब्द सीमा 30 शब्दों में ।

(10x2=20)

Very short answer question (word limit 30 words.)

इकाई – I / Unit -I

1. वाली सूत्र द्वारा समाकल $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ का मान ज्ञात कीजिये जहां n धन विषम पूर्णांक है ।

If n is any positive integer, then to find the value of the integral $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$, by Walli's formula. Where n is any positive odd integer.

2. परवलय $y = x^2$ और सरल रेखा $y = x$ के मध्य घिरे क्षेत्रफल का मान ज्ञात कीजिये ।

Find the area between the parabola $y = x^2$ and straight line $y = x$.

(2)

3. वक्र $x = f(y)$ की दो बिन्दुओं के बीच वक्र की लम्बाई का सूत्र लिखिए । (कार्तीय समीकरण)

Write the formula of length of curve $x = f(y)$ between two points. (Cartesian Equation).

इकाई – II / Unit -II

4. लम्ब कोणीय संछेदी को परिभाषित कीजिये ।

Define Orthogonal Trajectory.

5. प्रथम कोटि के अवकल समीकरण के यथातथ होने का प्रतिबंध को लिखिए ।

Write condition for exactness of first order differential equation.

6. अवकल समीकरण $p^2 + 2py \cot x - y^2 = 0$ को हल कीजिये ।

Write the solution of differential equation $p^2 + 2py \cot x - y^2 = 0$.

इकाई – III / Unit -III

7. द्वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण को परिभाषित कीजिये ।

Define Linear Differential Equation of second order.

8. $\frac{dx}{P} - \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ के रूप में युगपत समीकरणों का हल ज्ञात करने की विधियां बताइये ।

Describe the method of solution of simultaneous equations of the form $\frac{dx}{P} - \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$.

9. $\frac{1}{D^2 - 2} \cos t$ का मान ज्ञात कीजिये ।

Find the value of $\frac{1}{D^2 - 2} \cos t$.

(3)

इकाई – IV / Unit -IV

10. तुल्यता संबंध को परिभाषित कीजिये।

Define equivalence relation.

11. चक्रीय समूह को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिये।

Define cyclic group with example.

12. सिद्ध कीजिये कि यदि एक समूह G के प्रत्येक अवयव $a \neq e$ के लिए $a^2 = e$ तब G एक आबेली समूह है ?

Prove that is for every element $a \neq e$ in a group G , $a^2 = e$ then G is abelian group ?

इकाई – V / Unit -V

13. समूहों की तुल्याकारिता को परिभाषित कीजिये।

Define isomorphism of groups.

14. शून्य भाजक सहित रिंग को परिभाषित कीजिये।

Define ring without zero divisors.

15. प्रसामान्य उपसमूह को परिभाषित कीजिये।

Define Normal subgroup.

खण्ड – 'ब' Section - 'B'

लघुउत्तरीय प्रश्न (शब्द सीमा 60 शब्द)

Short answer question (words limit 60 words)

5x6=30

सभी प्रश्न हल कीजिये।

Attempt all questions.

(4)

इकाई – I / Unit -I

16. सिद्ध कीजिये कि $m, n \in N \cup \{0\}$ के लिये

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2}) \Gamma(\frac{n+1}{2})}{2 \Gamma(\frac{m+n+2}{2})}$$

जब m और n दोनों धनात्मक सम पूर्णांक हो ।

Prove that for $m, n \in N \cup \{0\}$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2}) \Gamma(\frac{n+1}{2})}{2 \Gamma(\frac{m+n+2}{2})}$$

Where m & n both are positive even entegers.

अथवा / OR

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का संपूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये ।

Find the complete area of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

इकाई – II / Unit -II

17. हल कीजिये : $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 \sin x$

Solve : $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 \sin x$

अथवा / OR

हल कीजिये : $p = \tan \left\{ x - \frac{p}{1+p^2} \right\}$

(5)

$$\text{Solve : } p = \tan \left\{ x - \frac{p}{1+p^2} \right\}$$

इकाई – III / Unit -III

18. परतंत्र चर को परिवर्तित करते हुए हल कीजिये –

$$\frac{d}{dx} \left(\cos^2 x \frac{dy}{dx} \right) + 4 \cos^2 x = 0$$

$$\text{Solve : } \frac{d}{dx} \left(\cos^2 x \frac{dy}{dx} \right) + 4 \cos^2 x = 0$$

अथवा / OR

$$\text{हल कीजिये : } \frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$$

$$\text{Solve : } \frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$$

इकाई – IV / Unit -IV

19. सिद्ध कीजिये कि सम्मिश्र संख्याओं के योग के सापेक्ष सभी सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय C एक अनंत आबेली समूह है ?

Prove that the set of all complex numbers C forms an infinite abelian group with respect to addition of complex numbers ?

अथवा / OR

यदि a समूह G का एक स्थिर अवयव है, तब सिद्ध कीजिये कि समुच्चय $N(a) = \{x \in G : xa = ax\}$ G में a का प्रसामान्य कहलाता है, G एक उपसमूह होता है ।

If $a \in G$ we define the normalizer of a in G by set $N(a) = \{x \in G : xa = ax\}$. Show

(6)

that $N(a)$ is a subgroup of G .

इकाई – V / Unit -V

20. किसी समूह के एक प्रसामान्य उपसमूह के सभी सहसमुच्चयों का समुच्चय काम्पलेक्सों के गुणन के संयोजन के रूप में लेने पर एक समूह होता है ?

The set of all cosets of a normal subgroup is a group with respect to multiplication of complexes as the composition.

अथवा / OR

यदि G समुच्चय $\{1, -1\}$ का गुणात्मक समूह है तथा G' अवशेष वर्ग माड्यूलों 2 ($\{[0], [1]\}$) का योगात्मक समूह है दर्शाइये कि वे तुल्याकारी समूह है।

If G be the multiplicative group of the set $\{1, -1\}$ and G' be the additive group of residue classes modulo 2, i.e. $G' = \{[0], [1], +2\}$. Then show that these are isomorphic groups.

खण्ड – 'स' Section - 'C'

दीर्घउत्तरीय प्रश्न—

Long answer question:

2x15=30

निम्नांकित में से किन्ही दो प्रश्नों को हल कीजिये।

Attempt any two questions from the following:-

इकाई – I / Unit -I

21. अ) सिद्ध कीजिये कि वक्र $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ या $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ की संपूर्ण लंबाई परिमाण $6a$ है।

(7)

Prove that the whole length of the curve $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$) is $6a$.

- ब) परवल्यों $y^2 = 4ax$ और $x^2 = 4ay$ के बीच उभयनिष्ठ क्षेत्रफल को ज्ञात कीजिये।
Find the area enclosed by the parabolas $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4ay$.

इकाई – II / Unit -II

22. अ) अवकल समीकरण $xp^2 - 2yp + 4x = 0$ का व्यापक हल तथा विचित्र हल ज्ञात कीजिये।
Find the general and singular solution of the differential equation $xp^2 - 2yp + 4x = 0$.
- ब) हल कीजिये – $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax$.
- Solve : $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax$.

इकाई – III / Unit -III

23. अ) प्राचल विचरण से हल कीजिये :

$$\frac{d^2y}{dx^2 + y} = \operatorname{cosec} x$$

Solve the method of variation of parameters :

$$\frac{d^2y}{dx^2 + y} = \operatorname{cosec} x$$

- ब) हल कीजिये :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x(1+x) \frac{dy}{dx} + 2(1+x)y = x^3$$

Solve : $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x(1+x) \frac{dy}{dx} + 2(1+x)y = x^3$

इकाई – IV / Unit -IV

24. अ) किसी उपसमूह के दो दक्षिण (वाम) सहसमुच्चय या तो विसंघीय (असंयुक्त) या सर्वसम (सर्वांगसम) होते हैं ।
 Any two right (Left) cosets of a subgroup are either disjoint or identical.
- ब) लग्रांज प्रमेय का कथन लिखिए और सिद्ध कीजिये ।
 State & Prove Lagrange's theorem.

इकाई – V / Unit -V

25. अ) समूहों पर समाकारिता का मूलभूत प्रमेय लिखिए और सिद्ध कीजिये ।
 State and Prove fundamental theorem on Homomorphism of groups.
- ब) एक वलय R शून्य भाजक रहित है यदि और केवल यदि R में निरसन नियम सत्य है। अर्थात् R शून्य भाजक रहित है $\Leftrightarrow R$ में निरसन नियम संतुष्ट होते हैं ।
 A ring R is without zero divisors if and only if the cancellation laws hold in R , i.e. R is without zero divisors \Leftrightarrow cancellation laws holds in R .

--00--