

**SIXTH SEMESTER EXAMINATION 2021-22****Class - B.Sc.****Subject - Mathematics  
(Analysis & Abstract Algebra)**

Time : 2.30 Hrs.

Max. Marks : 80

Total No. of Printed Page : 07

Mini. Marks : 28

नोट – प्रश्न पत्र तीन खण्डों में विभक्त है । सभी तीन खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार हल कीजिये । अंकों का विभाजन प्रत्येक खण्ड में दिया गया है ।

**Note:** Question paper is divided into three sections. Attempt question of all three section as per direction. Distribution of Marks is given in each section.

**खण्ड – 'अ' Section - 'A'**

प्रत्येक इकाई से दो प्रश्न हल कीजिये ।

**Attempt two questions from each unit.**

अतिलघुउत्तरीय प्रश्न, शब्द सीमा 30 शब्दों में ।

**(10x2=20)**

**Very short answer question (word limit 30 words.)**

**इकाई – I / Unit -I**

1. समुच्चय के संवरक को परिभाषित कीजिये ।

Define closure of a set.

2. सिद्ध कीजिये कि दूरिक समिष्ट  $(X, d)$  में  $X$  विवृत्त समुच्चय है –

Prove that in Metric space  $(X, d)$ ,  $X$  is open set.

3. पूर्ण दूरिक समिष्ट को परिभाषित कीजिये ।

Define complete metric space.

(2)

## इकाई – II / Unit -II

4. दूरिक समिष्ट के आधार को परिभाषित कीजिये।  
Define Base of metric space.
5. साधारण दूरिक समिष्ट  $R$  में सघन समुच्चय का उदाहरण लिखिये।  
Write an example of a dense set in usual metric space  $R$ .
6. अनुक्रमिक संहतता को परिभाषित कीजिये।  
Define sequential compactness.

## इकाई – III / Unit -III

7. रैखिक रूपांतरण की शून्यता को परिभाषित कीजिये।  
Define nullify of linear transformation.
8. रैखिक रूपांतरण के आव्यूह को परिभाषित कीजिये।  
Define matrix of Linear transformation.
9. रैखिक फलनक को परिभाषित कीजिये।  
Define linear functional.

## इकाई – IV / Unit -IV

10. आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$  के आइगन मान ज्ञात कीजिये।  
Fine Eigen value of  $A = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$ .
11. सिद्ध कीजिये कि समरूप आव्यूह के सारणिक समान होते हैं ?  
Prove that determinantes of similar matrices are equal.

(3)

12. निम्न द्विघाती समघात का सममित आव्यूह लिखिए :

$$f = 2x^2 + y^2 - z^2 + 2xz + 4yz - 5xy$$

Write symmetric matrix of following quadratic form :

$$f = 2x^2 + y^2 - z^2 + 2xz + 4yz - 5xy$$

### इकाई – V / Unit -V

13. यूक्लिडीय आंतर समिष्ट  $V_3(R)$  में सदिशों  $\alpha = (1, -3, 3)$  और  $\beta = (-3, -2, 1)$  के बीच कोण ज्ञात कीजिये।

Find the angle between vector  $\alpha = (1, -3, 3)$  and  $\beta = (-3, -2, 1)$  of Euclidean inner product space  $V_3(R)$ .

14. यदि  $V$  आंतरक गुणन समिष्ट है तब सिद्ध कीजिये कि  $\{0\} = V$

If  $V$  is inner product space Then prove that :  $\{0\} = V$

15. सिद्ध कीजिये  $V_2(R)$  का आधार  $s = \{(1, -3), (2, 2)\}$  लांबिक है ?

Prove that the base  $s = \{(1, -3), (2, 2)\}$  of  $V_2(R)$  is orthogonal ?

### खण्ड – 'ब' Section - 'B'

लघुउत्तरीय प्रश्न (शब्द सीमा 60 शब्द)

Short answer question (words limit 60 words)

5x6=30

सभी प्रश्न हल कीजिये।

Attempt all questions.

### इकाई – I / Unit -I

16. दूरीक समिष्ट  $(X, d)$  में सिद्ध कीजिये कि –

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

(4)

In a metric space  $(X, d)$  prove that :

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

अथवा / OR

सिद्ध कीजिये कि किसी दूरिक समिष्ट में समुच्चय  $F$  संवृत्त है यदि और केवल यदि वह अपने समस्त सीमा बिन्दुओं को अंतर्विष्ट करता है ?

Prove that in a metric space, a set  $F$  is closed if and only if it contains all its limit points.

### इकाई – II / Unit -II

17. सिद्ध कीजिये कि द्वितीय गणनीय दूरिक समिष्ट की प्रत्येक उपसमिष्ट द्वितीय गणनीय होती है ?

Prove that subspace of second countable metric space is second countable.

अथवा / OR

सिद्ध कीजिये कि संहत दूरिक समिष्ट बोइजानो वासस्ट्रास गुणधर्म रखती है ?

Prove that a compact metric space has the Bolzano Weistrass property ?

### इकाई – III / Unit -III

18. सदिश समिष्ट समाकारिता का मूलभूत प्रमेय लिखिए और सिद्ध कीजिये ?

State and prove fundamental theorem of Vector space homomorphism ?

अथवा / OR

(5)

सदिश समिष्ट  $V_3(R)$  के लिए आधार समुच्चय  $B = \{(1, -2, 3), (1, -1, 1), (2, -4, 7)\}$  का द्वैत आधार ज्ञात कीजिये।

Find dual basis of vector space  $V_3(R)$  for than basis set

$$B = \{(1, -2, 3), (1, -1, 1), (2, -4, 7)\}.$$

### इकाई – IV / Unit -IV

19. सिद्ध कीजिये कि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ विकर्णीय है ?}$$

Prove that following matrix is Diagonalizable :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

अथवा / OR

लाम्बिक रूपांतरण ज्ञात कीजिये जो –

$$f = 10x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 6yz - 10xz - 4xy \text{ को कैनोनिक प्रारूप में बदल दें।}$$

Find orthogonal transformation which transform following into canonical form :

$$f = 10x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 6yz - 10xz - 4xy$$

### इकाई – V / Unit -V

20. कौशी श्वार्ज असमिका लिखिए और सिद्ध कीजिये।

State and prove Cauchy-Schwarz Inequality.

(6)

अथवा / OR

यदि  $\alpha, \beta$  वास्तविक आंतर गुणन समिष्ट में सदिश है इस प्रकार कि  $\|\alpha\| = \|\beta\|$  तब सिद्ध कीजिये कि  $(\alpha + \beta, \alpha - \beta) = 0$

If  $\alpha, \beta$  are two vector in a Real inner product space such that  $\|\alpha\| = \|\beta\|$ . Then prove that :  $(\alpha + \beta, \alpha - \beta) = 0$

### खण्ड – 'स' Section - 'C'

दीर्घउत्तरीय प्रश्न—

Long answer question:

2x15=30

निम्नांकित में से किन्ही दो प्रश्नों को हल कीजिये ।

Attempt any two questions from the following:-

### इकाई – I / Unit -I

21. माना दूरिक समिष्ट है और तब सिद्ध कीजिये –

- (i)  $\bar{A}$  संवृत्त समुच्चय है
- (ii)  $A \subseteq B = \bar{A} \subseteq \bar{B}$
- (iii)  $A$  संवृत्त है  $\Leftrightarrow A = \bar{A}$
- (iv)  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- (v)  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Let be a metric space and then prove that

- (i)  $\bar{A}$  is closed set
- (ii)  $A \subseteq B = \bar{A} \subseteq \bar{B}$
- (iii)  $A$  is closed  $\Leftrightarrow A = \bar{A}$
- (iv)  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- (v)  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

**इकाई – II / Unit -II**

22. एक दूरिक समिष्ट  $(X, d)$  पृथक्करणीय है यदि और केवल यदि वह द्वितीय गणनीय है ?  
Prove that a metric space  $(X, d)$  is seprable if and only if it is second countable ?

**इकाई – III / Unit -III**

23. सिद्ध कीजिये कि समान क्षेत्र पर दो परिमित विमीय सदिश समिष्टयां तुल्यकारी होती है यदि और केवल यदि उनकी विमा समान है ?  
Prove that two finite dimensional vector spaces on same field are isomorphic if and only if their dimension are same ?

**इकाई – IV / Unit -IV**

24. मान लो  $V(F)$  एक परिमित विमीय सदिश समिष्ट है तथा  $W, V$  की सदिश समिष्ट है तब सिद्ध कीजिये –  
 $\dim w + \dim w^\circ = \dim V$   
Let  $V(F)$  be a finite dimensional vector space and  $W$  be subspace of  $V$ . Then prove that :  
 $\dim w + \dim w^\circ = \dim V$

**इकाई – V / Unit -V**

25. सिद्ध कीजिये प्रत्येक परिमित विमीय आंतर गुणन समिष्ट एक प्रसामान्य लांबिक आधार रखता है ?  
Prove that every finite dimensional inner product space has an orthogonal basis.